ПОЛ ЛОКХАРТ
ПЛАЧ МАТЕМАТИКА

Предисловие Кита Девлина

Эссе «Плач математика» написано Полом Локхартом, учителем математики в школе Св. Анны в Бруклине (шт. Нью-Йорк), в 2002 г. С тех пор оно стало известно в кругах математиков и преподавателей математики, но он так и не опубликовал его. Случайно обнаружив это сочинение несколько месяцев тому назад, я сразу решил, что оно заслуживает более широкой аудитории. Я связался с Полом, и он позволил мне опубликовать этот «плач» в «Эм-Эй-Эй Онлайн[1]». Положа руку на сердце, это лучшая критика школьного математического образования, какую я только встречал.

Пол — ученый-математик, посвятивший свою карьеру преподаванию математики в школе. Он заинтересовался математикой в возрасте 14 лет (и не в школе, как он попросил уточнить) и читал запоем, в основном заинтересовавшись аналитической теорией чисел. Бросив учебу на первом курсе, он посвятил себя математике, зарабатывая на жизнь программированием и преподаванием в начальной школе. Затем он начал работать с Эрнстом Штраусом[2] в университете Калифорнии в Лос-Анджелесе. Штраус познакомил его с Эрдёшем[3], который устроил Локхарта в аспирантуру. Локхарт защитил диссертацию в университете Коламбия в 1990 г., и был сотрудником Института математических исследований (MSRI) в Беркли и профессором в университете Брауна (шт. Род-Айленд) и в университете Калифорнии в Санта-Круз. Его научные интересы включают автоморфные функции и диофантову геометрию.

После нескольких лет преподавания математики в университете Пол решил вернуться в школу и учить детей. В 2000 г. он нашел работу в школе св. Анны, где, по его словам, «счастлив преподавать настоящую математику самым подрывным образом».

Он преподает математику во всех классах, от подготовительного до 12-го, и особенно заинтересован прививать математический взгляд самым маленьким ученикам. «Я хочу дать им понять, что их ум — это игровая площадка, и математика случается именно там. Я наблюдаю огромный энтузиазм и у детей, и у родителей, и гораздо меньший у администраторов средней руки», — писал он мне. Где-то я такое уже слышал…

Кит Девлин[4], март 2008 г.

Перевод и комментарии L. Fregimus (fregimus@gmail.com), ноябрь 2008 г.

[1] Сетевой журнал «Американской математической ассоциации» (*The Mathematical Association of America, MAA*).

[2] Эрнст Гэйбор Штраус (*Ernst Gabor Straus*, 1922—1983), американский математик германского происхождения, соавтор, в числе прочих, Эрдёша и Эйнштейна.

[3] Пол Эрдёш (*Erdős Pál*, 1913—1996), один из самых знаменитых и эксцентричных математиков XX в. Принимается за точку отсчета «числа Эрдёша».

[4] Кит Дж. Девлин (*Keith J. Devlin*), американский и английский математик и популяризатор математики.

* * *

Музыкант просыпается от кошмарного сна. Во сне он видел, будто музыкальное образование стало обязательным. «Мы помогаем ученикам вступить в этот заполненный звуками мир», — преподаватели, школьная система и государство принялись за этот жизненно важный проект. Проводятся исследования, образуются комиссии, принимаются решения… И все это без единого совета музыканта или композитора!

Музыканты, как известно, записывают свои идеи нотами; выходит, эти черные кружочки и палочки и есть «язык музыки». Важно, чтобы ученики свободно говорили на этом языке, если они собираются выучиться музыке; само собой, было бы абсурдно ожидать от ребенка, что он сможет спеть песенку или сыграть мелодию на каком-нибудь инструменте, если он не выучил музыкальной нотации и теории. А играть и слушать музыку, не говоря уж о сочинении собственной пьесы, учат в вузе и в аспирантуре.

А цель обучения младших и средник классов — научить школьников языку музыки: надо ведь заучить все правила обращения с этими символами! «На уроке музыки мы берем нотную бумагу, учительница пишет на доске ноты, а мы переписываем их или транспонируем в другую тональность. Нам надо научиться рисовать скрипичный и басовый ключи, и не путаться с тональностями. Наша учительница очень строгая. Она всегда смотрит, чтобы четвертные ноты были полностью закрашены. Однажды я решала хроматическую шкалу, и все сделала верно, но мне поставили двойку, потому что я нарисовала штили не в ту сторону».

Даже самые маленькие могут этому научиться! Третьекласснику стыдно не знать квинтового круга. «Мне пришлось нанимать сыну репетитора. Он просто не может делать домашнюю работу по музыке. Канючит, что ему скучно. Смотрит в окно, что-то насвистывает и напевает дурацкие песенки».

В старших классах программа напряженная: ученики готовятся к ЕГЭ и вступительным экзаменам. Они изучают гаммы и лады, разные размеры, учат гармонию и контрапункт. «Им надо многому научиться, но на младших курсах, когда они услышат все это, они поймут, как важно было пройти школьную программу». Конечно, не все студенты собираются специализироваться на музыке, так что немногие из них вообще когда-либо услышат звуки, которые обозначают черные кружочки нот. Тем не менее, чрезвычайно важно, чтобы каждый член общества мог распознать модуляцию или фугу, даже те, кто никогда их не слышал. «По правде говоря, большинство учеников успевают по музыке довольно средне. Они только и дожидаются звонка с урока, ничего не умеют, домашнее задание пишут, как курица лапой. Они не думают о том, насколько важна музыка в современном мире, они хотят только окончить школу, пройти самый минимум и получить оценку в аттестат. Наверное, есть просто способные и неспособные к музыке. У меня была одна замечательная ученица. Ее нотные листы были безупречны — каждая нотка на своем месте, каллиграфический почерк, и диезы, и бемоли красиво написаны. Когда-нибудь она станет великим композитором!»

Наш музыкант просыпается в липком холодном поту и понимает, что это был, к счастью, просто сон. «Конечно же! — говорит он вслух сам себе, чтобы успокоиться, — Ни одно общество не дойдет до такого, чтобы свести прекрасное и осмысленное искусство музыки к такой бездумной и тривиальной формальности; ни одна культура не может быть так жестока к детям, чтобы лишить их такого естественного и приятного способа самовыражения. Какая чушь мне снится!»

Тем временем, на другом конце города от похожего кошмара просыпается художник…

* * *

Я оказался в обычном классе — никаких мольбертов, никаких красок. «Мы не берем в руки красок до десятого класса, — сказали мне ученики, — В седьмом классе мы учим только теорию красок и кистей». Мне показали тетрадь по рисованию: в ней были закрашенные квадраты разных цветов с пустыми местами рядом с ними. Задание требовало вписать названия цветов рядом с квадратами. «Мне нравится рисование! — сказал кто-то из них, — Мне говорят, что делать, и я так и делаю. Это просто!»

После занятий я говорил с учителем. «Выходит, ученики ничего не рисуют?» — спросил я. «В старших классах они будут раскрашивать книжки-раскраски[5], и на следующий год мы будем подготавливать их к этому. Там они будут применять знания к жизненным рисовальным ситуациям — знаете, окунать кисти, вытирать их, и всякое такое. Само собой, мы стараемся уследить за каждым, за его способностями. Лучшие художники, те, кто знает кисти и краски, как свои пять пальцев, дальше идут в классы с углубленным изучением рисования. Но в основном мы пытаемся только дать ученикам базовые знания о рисовании, чтобы они могли выкрасить кухню, не превратив ее в кошмар».

—А эти… э-э-э… старшие классы…

— Ах, с углубленным изучением? В последнее время, все больше детей пытаются в них попасть. Я думаю, это родители их подталкивают, ведь запись об этом классе в аттестате дает преимущества при поступлении в вуз[6].

— Преимущества? А зачем нужно вузу, чтобы студенты умели закрашивать книжки-раскраски указанным цветом?

— А как же! Этим они демонстрируют ясность логического мышления! И, разумеется, если школьник планирует поступать на какой-нибудь дизайнерский факультет, лучше всего получить эти знания еще в школе.

---

[5] Речь здесь идет об американском повальном увлечении 50-х гг. XX в., наборах-раскрасках Paint-By-Number, то есть «рисуй по номеру». В наборы входила собственно раскраска, подложка будущей «картины» с нанесенным на ней контуром и номерами в каждой области, пронумерованные баночки с красками и кисти. «Написанные» «картины» обрамляли и вывешивали на стену.

Поразительным в этом нехитром хобби была развившаяся с ним философия «демократического» искусства, утверждавшая, что художником может быть каждый. Говорят, что в 50-х на стенах американских домов висело больше раскрасок, чем настоящих картин. Апофеозом этой художественной лихорадки стала выставка в Белом Доме этих «картин», раскрашенных чиновниками администрации Эйзенхауэра. Президент, по счастью, в художественную струю не влился.

Примеры раскрасок можно найти в виртуальном «музее» Le *salon de Paint-By-Numbers* http://www.paintbynumberz.com/. Читателя, заинтересовавшегося этим увлечением как социальным явлением, отсылаем к исследованию: *Marling, Karal Ann.* Hyphenated Culture: Painting by Numbers in the New Age of Leisure, in Marling, *As Seen on TV: The Visual Culture of Everyday Life in the 1950s.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1994. Популярное изложение: *Bird, William*. Paint by Number: The How-To Craze that Swept the Nation. *New York: Princeton Architectural Press, 2001.*

[6] В американской школьной системе успешно законченные факультативные классы углубленного изучения добавляют баллов при поступлении в вуз.

— Понятно… А когда ученики начинают рисовать… ну, так, на чистом холсте?

— Вы говорите, как один из моих старых профессоров! Они все время говорят о самовыражении в искусстве, о чувствах и всякой абстрактной дребедени. Я сама, между прочим, окончила художественный факультет, но мне ни разу не приходилось рисовать целую картину на чистом холсте. А в классе мы используем комплекты раскрасок, что закупает школа.

* * *

Увы, наша система преподавания школьной математики — именно такой кошмар. На самом деле, если бы мне велели придумать систему для уничтожения врожденного детского любопытства, стремления к поиску системы, я бы не смог сделать эту работу лучше, чем она уже делается: у меня попросту не хватило бы воображения дойти до этих бессмысленных и бездушных методик современного школьного математического образования.

Причем все понимают, что что-то не в порядке. Политики говорят: «Нам нужны более высокие стандарты». Школы говорят: «Нам нужно больше денег и оборудования». Каждый говорит свое, но все они неправы. Но тех единственных, кто понимает, что происходит, не только не слушают, но и чаще других обвиняют во всем происходящем. Я говорю о детях. Они говорят: «Уроки математики скучные и глупые». И они правы.

Математика и культура

Первое, что нам следует понять — то, что математика есть искусство. Различие между математикой и другими искусствами, такими, как музыка или рисование, состоит в том, что наша культура не признает ее искусством. Все понимают, что поэты и музыканты создают произведения искусства, выражая себя в слове, картине и звуке. Наше общество, можно сказать, щедро на признание искусством области творчества: архитекторы, шеф-повара и даже телеведущие признаются людьми искусства. Так почему же не математики?

Часть проблемы в том, что ни у кого в обществе нет даже приблизительного понятия о том, что же делают математики. Общее понимание, похоже, таково, будто математика как-то связана с естественными науками[7]: математики помогают ученым своими формулами, или вычисляют огромные числа на компьютерах для той или иной научной задачи. Без сомнения, если бы потребовалось поделить мир на «поэтических мечтателей» и «рациональных мыслителей», большинство людей определило бы математиков в последнюю категорию.

Тем не менее, нет ничего на свете столь же мечтательного и поэтичного, столь же радикального, взрывного и психоделичного, как математика. Она настолько же умопомрачительна, как физика или космология (в конце концов, математики *мыслили* о черных дырах задолго до того, как астрономы открыли их), и гораздо свободнее в выразительных средствах, чем поэзия, живопись или музыка (ибо они зависимы от свойств материальной Вселенной). Математика — чистейшее из искусств и самое непонятое из них.

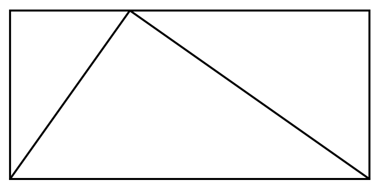
[7] На Западе науки делятся на естественные (*sciences*) и гуманитарные (*humanities*); математика не считается частью ни того, ни другого.

Позвольте мне объяснить, что такое математика и чем занимаются математики. Я не найду лучшего описания, чем то, что дает Г. Г. Харди[8]:

Математик, как и художник и поэт, создает узоры*. И если его узоры долговечнее, то это потому что они сотканы из* идей.

Значит, математики сидят и ткут узоры из идей. Какие узоры? Из каких идей? Идеи о носорогах? Нет, оставим их биологам. Идеи о культуре и языке? Обычно нет. Эти вещи слишком сложны на вкус математика. Если мы должны найти объединяющий эстетический принцип математики, то он будет таков: *простое — прекрасно*. Математикам нравится думать о простых вещах, и самые простые вещи — *воображаемые*.

Например, когда я в настроении подумать о геометрических формах — а я часто бываю в таком настроении, — я могу представить себе треугольник, вписанный в прямоугольник:



Я думаю о том, какую часть прямоугольника занимает треугольник. Примерно две трети, похоже? Тут важно понимать, что я думаю не о *рисунке* треугольника в прямоугольнике. И я говорю не о треугольнике-части фермы моста. В этом нет скрытой практической цели. Я *играю*. Это и есть математика: интерес, игра, развлечение собственным воображением. С одной стороны, вопрос о том, какую часть прямоугольника занимает треугольник, попросту не имеет *смысла* для реальных объектов! Даже самый тщательно изготовленный треугольник есть лишь безнадежно сложное сооружение из подрагивающих атомов, и его размер меняется каждую малую долю секунды — если мы не говорим о неких *приближенных* измерениях. Это не просто, и, следовательно, это некрасивый вопрос, зависящий от множества деталей реального мира. В этом проявляется эстетика математики. Мы оставим этот вопрос ученым. *Математический* вопрос задается о воображаемом треугольнике, вписанном в воображаемый прямоугольник. Его стороны совершенны, потому что я так хочу — или потому что мне нравится думать о таких объектах. Это лейтмотив математики: ее объекты таковы, каковыми вы их представите. Ваш выбор безграничен; реальность не встает на вашем пути.

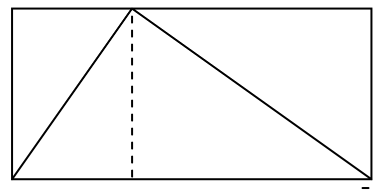
С другой стороны, как только вы сделали выбор (например, я могу сделать мой треугольник симметричным или нет), ваши создания ведут себя определенным образом, хотите вы того или нет. Удивительнейшее свойство воображаемых узоров: они вам отвечают! Треугольник занимает определенную часть прямоугольника, и не в моих силах изменить эту часть. Это число, может быть, оно равно двум третьим, может быть, нет, но главное, что я не могу просто так решить, каким оно будет. Я должен его *найти*.

Так, мы начинаем играть, и строим воображаемые узоры, и задаем вопросы об этих узорах. Но как мы находим ответы на эти вопросы? Совсем не так, как в естественных науках. Нет такого эксперимента в лаборатории с пробирками или на какой-нибудь специальной техни-

[8] Харди, Годфри Гарольд (*Godfrey Harold Hardy*, 1877—1947) — знаменитый английский математик.

ке, чтобы исследовать мой вымысел. Единственный способ узнать правду о воображаемых объектах — это напрячь воображение, и это непростая работа.

В случае с нашим треугольником в прямоугольнике, я вижу кое-что простое и красивое:

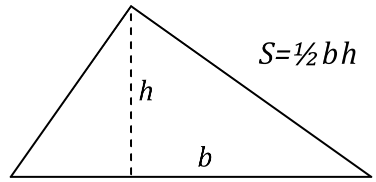


Если я разрежу прямоугольник на две части по пунктирной линии, сразу видно, что стороны треугольника рассекают каждую из частей ровно надвое. Значит, вне треугольника такая же часть прямоугольника, что и внутри, и, следовательно, площадь треугольника в точности равна половине площади прямоугольника!

Вот так выглядит и ощущается математика. Это маленькое описание — пример искусства математика: он задает простые и элегантные вопросы о воображаемых объектах, а затем придумывает правильные и красивые объяснения. Ничего подобного этому царству чистой идеи нет; это очаровательно, занимательно и не стоит ничего!

Понятно, но откуда взялась моя идея? Как я догадался провести линию? Как живописец знает, где приложить кисть? Вдохновение, опыт, пробы и ошибки и слепая удача. В этом и состоит искусство — создавать эти прекрасные поэмы мысли, эти сонеты чистого разума. В этом виде искусства есть что-то чудесно преобразующее нас. Отношение между треугольником и прямоугольником было загадкой, и одна маленькая линия сделала разгадку очевидной. Я не мог ее увидеть, и вдруг неожиданно увидел. Каким-то образом я создал глубокую и простую красоту из ничего, и изменил этим себя — разве не это мы называем искусством?

Вот почему мне так горько видеть, во что превращают математику в школе. Очаровательная, плодотворная игра воображения выхолащивается до стерильного набора зазубриваемых фактов и способов решения. Вместо простого и естественного вопроса о геометрических формах и творческого и полезного процесса изобретения и открытия ученикам дают вот это:



«Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту». От учеников требуется запомнить формулу и «применять» ее раз за разом в «упражнениях». Уходит и радость, и дрожь нетерпения, и труд, и даже горечь творческого акта. Ведь это даже более не задача. Вопрос был задан вместе с ответом, и ученику ничего не осталось делать.

Мне следует здесь явно объяснить, против чего я возражаю. Я не против ни формул, ни запоминания интересных фактов. Это замечательно в контексте, и, как и заучивание слов при изучении языка, позволит вам создавать более глубокие произведения, полные тонких нюансов. Но сам по себе *факт*, что треугольник занимает половину описанного прямоугольника, не важен! Важна *идея* рассечь его прямой линией; важно то, как она вдохновляет на поиск других прекрасных идей и ведет к творческим прорывам при решении других задач — то, чего не дает вам простое утверждение факта.

Удаляя творческий процесс и оставляя лишь результат этого процесса, вы почти наверняка гарантируете, что никто не будет на самом деле заниматься предметом. Это все равно, что *сказать*, что Микеланджело создал чудесные скульптуры, при этом ни разу не *показав* их. Можно ли вдохновиться этим? (На самом деле, все гораздо хуже — по крайней мере, в последнем случае я бы знал, что эти произведения искусства *существуют*, но мне их попросту не показывают.)

Когда концентрируются на *что*, но игнорируют *почему*, от математики остается одна пустая оболочка, видимость. Искусство — не в истине, а в объяснении, аргументации. Объяснение дает истине контекст, определяет, о чем на самом деле говорится и что имеется в виду. *Математика есть искусство объяснения*. Если вы не дадите ученикам возможности заняться объяснением — формулировать свои собственные задачи, предлагать свои гипотезы, делать свои открытия, ошибаться, терпеть творческие неудачи, вдохновляться и складывать свои собственные, пусть и неуклюжие, объяснения и доказательства, — вы лишите их самой математики. Я не возражаю против формул и фактов. Я жалуюсь на отсутствие *математики* на наших уроках математики.

Если учитель рисования скажет вам, что живопись — это закрашивание пронумерованных областей на шаблоне, вы сразу почувствуете подвох. Сама культура скажет вам об этом — ведь существуют музеи и картинные галереи, и вы видите предметы искусства даже дома. Живопись хорошо понимается обществом как средство человеческого самовыражения. Подобно тому, если учитель астрономии скажет, что астрономия занимается предсказанием судьбы по дате рождения, вы сразу поймете, что он спятил, ведь наука до такой степени проникла в культуру, что почти каждый знает об атомах и галактиках и законах природы. Но если учитель математики даст вам понять, что математика занимается формулами, определениями и способами вычисления, которые надо запомнить, кто или что скажет вам правду?

Культурная проблема эта — чудовище, раскармливающее само себя: ученики узнают о математике от учителей, а учителя — от своих учителей, и непонимание и неприятие математики нашей культурой поддерживается бесконечно. Хуже того, бесконечная поддержка этой псевдоматематики с упором на точную, но неосмысленную манипуляцию с символами, создает свою культуру со своими ценностями. Адепты ее получают громадную самооценку от своих успехов. Меньше всего они хотят слышать о том, что математика в первую очередь — чистые творчество и эстетика. Многие выпускники университетов, которым десяток лет говорили, что у них талант к математике, с ужасом осознают, что к настоящей математике у них нет никакого таланта, и что на самом деле их талант следовать указаниям, и только. А математика — это не следование указателям, это расстановка указателей.

И ведь я даже еще не упоминал отсутствия математической критики в школе! Школьники так и не узнают ни о том, что математика, как и любая литература, создается людьми для забавы, игры ума, ни о том, что математические труды необходимо критиковать, ни того, что человек должен выработать математический вкус. Математический дискурс подобен поэме, и нам следует спрашивать, удовлетворяет ли он нашим эстетическим критериям: тверда ли его аргументация? есть ли в нем смысл? прост ли он и элегантен? позволяет ли он добраться до сути дела? Конечно же, в школе вы не найдете такой критики.

Почему мы не хотим, чтобы наши дети научились математике? Может быть, мы не доверяем им, или думаем, что это слишком сложно? Как будто мы чувствуем, что они могут прийти к собственному мнению о Наполеоне, но не о треугольниках. Я думаю, что причина в том, что мы, как культура, не знаем, что такое математика. Впечатление, которое мы получаем — будто это что-то такое холодное и сугубо техническое, чего, наверное, никто толком и не понимает: и ведь это выходит пророчество, исполняющее само себя, если такое вообще возможно.

Было бы полбеды, если бы наша культура была просто математически необразованной, а беда наша в том, что люди думают, будто они знают, что такое математика, и потому находятся под совершенно неверным впечатлением, будто математика чем-то практически полезна обществу. В этом уже видна огромная разница между восприятием математики и прочих искусств: математика рассматривается обществом, как некий инструмент решения естественнонаучных и технических задач. Каждый знает, что музыка и поэзия нужны для услады души и облагораживания духа (поэтому они едва присутствуют в школьной программе), но математика — о нет! — математика «важна».

Симплицио[9]. Ты утверждаешь, что математика не имеет практического приложения в обществе?

Сальвиати. Конечно же нет! Просто обращаю внимание, что из того, что некий предмет приводит к практическим последствиям, не следует, будто он предназначен для этого. Музыка ведет армии в бой, но люди сочиняют симфонии не для того. Микеланджело расписывал потолок, но в мыслях у него было кое-что и повыше.

Симплицио. Ведь нужно учить людей этим практическим результатам. Разве не нужны нам счетоводы, плотники и так далее?

Сальвиати. Много ли людей пользуются этой самой «практической» математикой, что они изучили в школе? Ты думаешь, будто плотникам нужна тригонометрия? Много ли ты знаешь взрослых, что умеют делить дроби или решать квадратные уравнения? Очевидно, что нынешнее практическое обучение не работает, и понятно почему: оно невыносимо скучно, и никому не требуется на практике. Так почему же люди думают, будто оно важно? Я не вижу, что пользы в том, что граждане носят в головах бледные воспоминания об алгебраических формулах и геометрических чертежах, и ясные воспоминания о том, как это все противно! С другой стороны, было бы куда полезнее показать им нечто прекрасное, дать им возмож-

---

[9] Диалоги Локхарта ведут два философа из знаменитого труда Галилео Галилея «Диалог о двух главнейших системах мира» *(Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo).* Сальвиати — прогрессивный философ, излагающий гелиоцентрическую систему мира и пытающийся убедить ретрограда Симплицио. Издание «Диалога» в пер. А.И.Долгова (М., Ленинград : ОГИЗ — СССР, 1948) находится в Сети:
http://naturalhistory.narod.ru/Person/Srednevek/Galiley/Dialog_Ogl.htm

ность стать творческими, гибкими умом мыслителями без предрассудков, — такими, какими их бы сделало настоящее математическое образование.

Симплицио. Но ведь люди же должны уметь деньги считать!

Сальвиати. Для этого калькуляторы есть. Почему бы ими не пользоваться? Куда как легче и вернее. Мой аргумент не только в том, что сегодняшняя система так ужасно плоха, но и в том, что она упускает нечто воистину чудесное! Математику следует преподавать как искусство во имя искусства, а «приземленные» полезные аспекты тривиально воспоследуют сами собою. Бетховен без труда бы написал песенку для рекламного ролика, но музыке ведь он учился, чтобы создавать прекрасные произведения!

Симплицио. Не каждый урожден художником. Как тогда быть с детьми, которые попросту «не математики»? Как они укладываются в твою схему?

Сальвиати. Если бы каждый был предоставлен математике в ее естественной форме, со всеми ее трудными радостями и удивлением познания, что она влечет за собою, думаю, мы бы были свидетелями драматического изменения отношения детей к математике, а взрослых — к тому, что означает быть «сильным по математике». Мы теряем столь многих несостоявшихся одаренных математиков — творцов, умниц, которые совершенно справедливо отвергают то, что видится им бессмысленным и выхолощенным предметом. Они попросту слишком умны, чтобы тратить время на такую чушь!

Симплицио. А тебе не кажется, что, будь уроки математики устроены подобно урокам рисования, так многие дети тогда бы вообще ничему не научились?

Сальвиати. Так они же ничему и не учатся! Лучше бы уж никаких уроков математики не было, чем такие! Пусть хоть кто-нибудь тогда смог бы открыть ее красоту для себя сам.

Симплицио. Так ты хочешь убрать математику из школьной программы?

Сальвиати. Ее давно убрали! Вопрос уже стоит о том, что делать с оставшейся от нее пустой засохшей шкуркой. Разумеется, я бы предпочел заменить ее исполненным радости, деятельным знакомством с математическими идеями.

Симплицио. Да много ли учителей знают свой предмет достаточно, чтоб так его преподавать?

Сальвиати. Мало, очень мало. И это лишь верхушка айсберга…

Математика в школе

Нет вернее способа убить энтузиазм детей и их интерес к предмету, чем включив его в обязательную часть школьной программы[10]. Включите его в ЕГЭ, и вы наверняка увидите, как образовательная бюрократия высосет все его жизненные соки. В отделах образования не понимают, что такое математика — как не понимают этого ни директора школ, ни авторы

[10] В старших классах американской школы часть предметов обязательна, а остальные выбираются учащимися из списка, обычно по интересам и будущей специальности.

учебников, ни их издатели, ни — печальнее всего — учителя. Проблема столь велика, что я едва понимаю, с какого конца начать ее излагать.

Начнем с поражения множества реформ математического образования. Уже долгие годы все большее внимание уделяется разладу в системе математического образования. Оплачиваются исследования, собираются конференции, формируются бессчетные комитеты учителей, авторов и издателей учебников, чтобы «исправить ситуацию». Не упустив ни капли собственной издательской выгоды (на любые флуктуации политики обучения они отвечают предложением новых редакций своих нечитабельных уродищ), все эти реформаторы упустили главное: математическая программа должна быть не исправлена — она должна быть *выброшена вон*.

Вся эта болтовня и показуха касательно того, какие «пункты программы» и в каком порядке следует учить, использовать эту систему записи вместо той, какой модели *калькулятор*, Господи прости, нужен школьнику, — все это напоминает перестановку стульев на палубе тонущего «Титаника». Математика есть *музыка разума*. Заниматься математикой — значит совершать открытия и строить предположения; жить вдохновением и интуицией; значит оказываться в отчаянии — не потому, что предмет не имеет смысла, а потому, что вы придали ему смысл и все еще не понимаете, как ведет себя ваше создание; значит испытать и прорыв фонтана идей, и поражение художника; и в ужасе неметь от почти что физически невыносимого, переполняющего вас чувства прекрасного; да значит быть *живым*, черт побери! Уберите это из математики, и можете собирать сколько угодно умных конференций, и это ничего не изменит. Оперируйте, сколько хотите, дорогие доктора: пациент уже мертв.

Наипечальнейшая часть этих реформ — попытки «сделать математику интересной» и «важной в жизни детей». Вам не надо *делать* математику интересной — она уже более интересна, чем вы сможете вынести! И торжество ее в *неважности* для жизни — вот почему она так занимательна.

Попытки изобразить математику полезной и нужной для ежедневных дел всегда натужны и убоги: «Видите, дети, как просто, когда знаешь алгебру, высчитать, сколько Марии лет, если ей на два года больше, чем дважды ее возраст семь лет назад!» — как будто кто-то в жизни получит эту безумную информацию вместо настоящего возраста. Алгебра — не инструмент для жизни, это искусство симметрии и чисел, и потому достойно постижения само по себе.

Даны сумма и разность двух чисел. Каковы сами числа?

Вот простой, элегантный вопрос, и не надо лезть из кожи вон, чтобы придать ему привлекательности. Древние вавилоняне любили решать такие задачи, и наши ученики их тоже любят. (Да и вам, надеюсь, понравится!) Нам не надо заворачиваться в тройные узлы, чтобы придать математике важность для ежедневных дел. Ее важность, как и важность искусства вообще — в осмыслении человеческого опыта.

Или, может быть, вы думаете, что дети хотят чего-то, относящегося к их ежедневным делам? Может быть, их восхищает что-то практическое, например, сложный процент по кредиту? Людей восхищает фантазия, и это именно то, что математика может дать — убежище от ежедневного, волшебный бальзам от практических забот.

Другая проблема — когда авторы учебников начинают «сюсюкать», чтобы сделать математику «дружественной» и победить «страх перед математикой» (одна из множества болезней, на самом деле *вызываемых* школой). Чтобы ученики могли запомнить формулы, вы можете придумать целую историю о том, как Иван Демьянович едет на машине вокруг Елизаветы Макаровны и говорит ей, как хороши были ее **два пир**ога ($L=2\pi R$), или что ее пироги квадратные ($S=\pi R^2$), или еще какую-нибудь глупость. А как же настоящий рассказ о проблеме измерения кривых, о Евдоксе[11] и Архимеде и методе неделимых, о трансцендентности числа π? Что интереснее — измерять приблизительный размер кружка по клеточкам, а потом вычислять длину окружности по формуле, которую вам дали без объяснения, или услышать историю одной из самых прекрасных, захватывающих задач, и самых ярких и сильных идей всей человеческой истории? Мы убиваем в детях интерес к кругам, в конце концов!

Почему мы не даем ученикам услышать об этом, не то чтобы дать им возможность самим позаниматься математикой, прийти к собственным идеям и мнениям? Какой еще предмет изучают, даже не упоминая о том, каковы его история, философия, основоположения, эстетические критерии и текущее положение вещей? Какой еще предмет отбрасывает первоисточники — чудесных произведений искусства, выполненных самыми творческими умами истории — в пользу убогих третьесортных учебников?

Главная проблема школьной математики в том, что в ней нет задач. Да, я знаю, что выдается за задачи на уроках: эти безвкусные, скучные упражнения. «Вот задача. Вот как ее решить. Да, такие бывают на экзамене. На дом задачи 1—15». Что за тоскливый способ изучать математику: стать дрессированным шимпанзе.

Но задача — настоящий, честный до мозга костей естественный человеческий вопрос — это нечто другое. Какова длина диагонали куба? Закончатся ли простые числа? Бесконечность — число или нет? Сколькими способами можно симметрично покрыть поверхность плитками? История математики — это история решения этих вопросов, не бессмысленного пережевывания формул и алгоритмов, вместе с натянутыми упражнениями, чтобы их применять.

Хорошая задача — такая, решения которой вы не знаете. Вот где загадка, вот что дает настоящие возможности! Хорошая задача не стоит в отдельности, но служит стартовой площадкой для других интересных задач. Треугольник занимает половину описанного прямоугольника. А как насчет пирамиды в кубе? Можно ли эту задачу решить тем же способом?

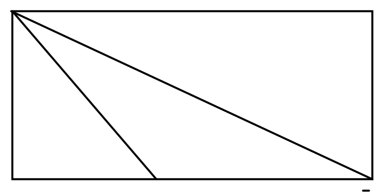
Я принимаю идею обучения школьников технике решения, и я сам это делаю. Но это не цель. Техника в математике, как и в любом искусстве, должна изучаться в контексте. Великие задачи, их история, творческий процесс — вот этот контекст. Дайте ученикам хорошую задачу, пусть они поломают головы, пусть у них не получится ее решить. Посмотрите, что у них выйдет. Дождитесь до того момента, когда они страстно захотят свежую идею. Тогда научите их какой-то технике, только немного.

Отложите в сторону планы уроков и диапроекторы, мерзкие красочные учебники, компакт-диски и весь остальной парад уродов бродячего цирка, и займитесь с учениками математикой! Учителя живописи не тратят время на чтение учебников и зазубривание техники —

[11] Евдокс Книдский (408—355 до н. э.) — древнегреческий философ, астроном и геометр, ученик Платона. Разработал метод исчерпывания для вычисления длины кривой.

они просто дают детям рисовать. Они ходят от мольберта к мольберту и подсказывают, направляют:

— Я думала о задаче с треугольником, и кое-что заметила. Смотрите, если треугольник наклонный, то он не занимает половины прямоугольника!



— Превосходное наблюдение! Наше рассуждение с рассечением треугольника предполагало, что вершина находится над основанием. Теперь нам нужна новая идея.

— Попытаться рассечь его иначе?

— Конечно. Попробуй всевозможные идеи. Расскажи потом, что у тебя выйдет!

Как же нам учить детей математике? Выбирая занимательные и естественные задачи, в соответствии с их вкусами, интересами и опытом. Давая им время делать открытия и строить гипотезы. Помогая им выстраивать доказательства и создавая атмосферу здорового и живого математического критицизма. Улавливая, куда меняется их интерес. В общем, выстраивая честные и открытые интеллектуальные отношения с учениками. Это требует слишком большой ответственности и слишком большой открытости — короче, это слишком много работы!

Гораздо проще быть пассивным передатчиком готовых школьных «материалов» и следовать инструкции, как на бутылке шампуня — «лекция, экзамен, повторить» — чем глубоко мыслить о собственном предмете и передавать этот смысл честно и наилучшим образом своим ученикам. Нас просто уговаривают забросить сложную задачу принятия решений своим умом и совестью, и вместо этого «проходить программу». Это попросту путь наименьшего сопротивления:

> Выберите правильный ответ:
> *Авторы учебников относятся к учителям так же, как:*
> а) *фармацевтические компании к докторам;*
> б) *компании звукозаписи к диск-жокеям;*
> в) *корпорации к депутатам*
> г) *все вышеперечисленное.*

Труд математики, как и живописи и поэзии, состоит в тяжелой творческой работе. Поэтому математику очень сложно преподавать. Математика — медленный созерцательный процесс. Изготовить произведение искусства занимает время, а, чтобы распознать его, нужен искусный учитель. Разумеется, легче вывесить список правил, чем вести за собой будущих художников, как легче написать инструкцию к телевизору, чем книгу со своей точкой зрения.

Математика — искусство, а искусство должно преподаваться действующими мастерами, или уж, по крайней мере, педагогами, любящими искусство и способными его распознать. Не обязательно учиться музыке у профессионального композитора, но отдадите ли вы ребенка в обучение кому-то, кто не умеет играть сам и не слышал ни одного музыкального произведения за всю жизнь? Возьмете ли вы учителем рисования того, кто не держал в руке карандаша и никогда не был в музее? Как же тогда мы допускаем в учителя математики того, кто не создал ни одного математического произведения, не знает ни истории, ни философии предмета, ни последних достижений математики, и ничего, в конце концов, из того, что он должен преподавать своим несчастным студентам? Что же это за учитель? Как они могут учить тому, чего сами не знают? Я не умею танцевать, но мне и в голову не придет, будто я могу вести танцевальный класс (хоть я мог бы и попробовать, но это выглядело бы ужасно). Разница в том, что я знаю, что я не умею танцевать. Мне никто не скажет, что я хорошо танцую, даже если я знаю кучу танцевальных терминов.

Я не пытаюсь даже сказать, что учителя математики должны быть профессиональными математиками — нет, я и не подхожу к этому. Но не должны ли они хотя бы понимать, что такое математика, знать ее, и любить?

Если учеба превращается в простую передачу информации, если в ней нет делимого с учеником восхищения и чуда, если учителя суть пассивные получатели информации, а не творцы новых идей, есть ли тогда надежда у наших школьников? Если сложение дробей для учителя является случайным набором правил, а не результатом творчества или результатом эстетически обоснованного выбора, тогда несомненно надежды у бедных учеников и быть не может.

Преподавание это не передача информации. Преподавание — это честные интеллектуальные отношения с учениками. Для этого не нужны ни методы, ни пособия , ни специальная подготовка. Для этого нужно только быть самим собой. Если вы сами не можете быть собой, то у вас нет никакого права причинять себя ни в чем неповинным детям.

В частности, вы не можете учить учить. Педагогические курсы — полная лажа. Да, вы можете пройти курсы по раннему детскому развитию и еще чему-нибудь, обучиться «использовать доску эффективно», готовить организованный «план урока» (что, кстати, обеспечивает вашему уроку плановость, следовательно, лживость), но вы никогда не станете учителем, если не будете настоящим человеком. Преподавание — это открытость и честность, желание делиться радостью знания, любовь к учению. Без этого все педагогические дипломы мира не помогут вам, и совершенно бесполезны.

Это так просто. Ученики не пришельцы с Альфы Центавра. Они понимают прекрасное, они видят узор, они от природы любопытны, как и все мы. Просто расскажите им! И — еще важнее — слушайте их!

Симплицио. Ну ладно, мне ясно, что в математике есть элемент искусства и что мы могли бы лучше это объяснять. Но ведь это, наверное, слишком заумная штука, чтобы ожидать ее от школы? Мы же не философов там учим, нам же надо, чтобы они арифметику знали до той степени, чтобы нормально вписаться в общество.

Сальвиати. Это не так! Школьная математика занимается множеством вещей, не связанных с возможностью вписаться в общество — например, алгеброй и тригонометрией. Эти дисциплины совершенно бесполезны для ежедневных дел. Я просто предлагаю вот что: раз мы включаем эти вещи в план среднего образования, так уж делать это органично и естественно. К тому же, как я уже говорил, то, что из предмета можно получить практическую пользу, еще не говорит о том, чтобы на этой пользе обучение фокусировать. Конечно, следует научиться читать, чтобы заполнить бланк на почте, но ведь мы не для этого детей учим чтению. Мы учим их чтению для высшей цели — дать им доступ к прекрасным и значительным идеям. Не только было бы бесполезно учить третьеклассников писать, давая им заполнять бланки налоговых деклараций — это бы и не работало! Мы учимся, потому что нам интересно то, чему мы учимся, здесь и сейчас, не потому, что это будет полезно в дальнейшем. А ведь с математикой мы именно так и поступаем.

Симплицио. Но разве третьеклассники не должны знать арифметики?

Сальвиати. Зачем? Ты хочешь научить их складывать 427 и 389? Это не из тех вопросов, что спрашивают восьмилетки. Да не все взрослые полностью понимают десятичную позиционную арифметику, а ты хочешь, чтобы у третьеклассников была полная ясность? Или тебе все равно, поймут они это или нет? Слишком рано это для такого механического обучения. Конечно, их можно научить, но, думаю, от этого вреда выйдет больше, чем пользы. Лучше дождаться, пока у них не появится естественный интерес к числам.

Симплицио. Так чем же дети должны заниматься на уроках математики?

Сальвиати. Играть! Научите их играть в шахматы и го, гекс и нарды, «ростки» и ним[12], да чему угодно — выдумайте игру! Отгадывайте загадки. Создавайте для них ситуации, где необходимо дедуктивное мышление. Не думайте о формальностях записи и технике, а помогайте их активному и творческому математическому мышлению.

Симплицио. Похоже, мы возьмем этим на себя слишком большой риск. Что же, нам не учить школьников арифметике — ведь они не будут уметь складывать и вычитать!

Сальвиати. Полагаю, что мы куда больше рискуем создать школу, лишенную творческого выражения, где функции ученика будут запоминать даты, формулы и списки слов, а затем выплевывать их на стандартных экзаменах, готовясь стать «строителем светлого будущего».

Симплицио. Но послушай, ведь должен быть какой-то минимум математических фактов, которые должен знать любой образованный человек!

Сальвиати. Да, и самый главный из этих фактов — то, что математикой люди занимаются для собственного удовольствия! Согласен, неплохо знать некоторые основные факты о числах и геометрических фигурах. Но это не придет от зубрежки, повторений, лекций и упражнений. Ты можешь конечно, заучить их. Мы видим миллионы взрослых людей, повторяющих «минус b плюс-минус корень из b в квадрате минус $4ac$, деленное на $2a$», и все это без малейшего понятия, что это значит. А причина в том, что им так и не дали возможности открыть или изобрести что-то самим. Они никогда не решали увлекательной задачи, не би-

[12] «Ростки» (англ. *Sprouts*) — игра для двух противников, изобретенная Дж, Конвеем, математиком, придумавшим также знаменитый клеточный автомат «Жизнь». Гекс (англ. *hex*), го (англ. *go*), ним (англ. *nim*) — настольные игры. Перечисленные игры интересны (кроме, разумеется, собственно игры) их математическим исследованием.

лись над ней, не искали способ решения. Им никто не рассказал об истории отношений человека и чисел — ни о вавилонских табличках с задачами, ни о папирусе Ахмеса, ни о *Liber abaci*, ни об *Ars magna*[13]. И — самое главное — у них не было возможности задаться вопросом, ибо на все их вопросы были даны ответы еще до того, как они их могли задать.

Симплицио. Но у нас нет столько времени, чтобы каждый ученик изобрел себе математику! У человечества ушли века на теорему Пифагора — как же ты хочешь, чтобы обычный школьник ее сам открыл?

Сальвиати. Я этого не хочу. Позволь мне ясно сказать: я сожалею о полном отсутствии в математической программе искусства и открытия, истории и философии, контекста и перспективы. Я не хочу сказать, что нотация, техника и накопление знаний не нужны. Нужны, конечно. У нас должно быть и то, и это. Если я возражаю против того, что маятник слишком далеко отклонился в одну сторону, это не значит, что я за то, чтобы он отклонился до конца в другую. Люди на самом деле лучше учатся, когда результат получается из процесса. Настоящая любовь к стихам приходит не от запоминания сотен поэм, а от написания собственных стихов.

Симплицио. Да, но прежде, чем писать стихи, ты должен выучить алфавит! Должно же все с чего-то начинаться. Сначала учатся ходить, потом — бегать.

Сальвиати. Да нет же, сначала тебе нужно знать, куда бежать. Дети учатся писать стихи и рассказы и одновременно письму и чтению. Рассказ шестилетнего — это чудесно, и орфографические и стилистические ошибки нисколько не умаляют этого чуда. Даже самые маленькие дети сочиняют песенки, хотя и не знают, в каком они размере и в какой тональности.

Симплицио. Но разве математика не отличается от музыки? Разве математика — не система символов, язык сам по себе, который надо выучить прежде, чем говорить на нем?

Сальвиати. Нет, это совершенно не так. Математика — не язык, а приключение. Разве музыканты «говорят на другом языке», сокращая свои идеи до маленьких черных нот? Если бы и так — это все равно не мешает карапузу и его песенке. Да, определенная система математической записи образовалась за века, но она не является самоважной. Математика частенько делается с друзьями за чашкой кофе на салфетках. Математика — это идеи, а идеи превосходят символы, которыми они записываются. Гаусс однажды заметил: «Нам нужны идеи, а не идиомы!»

Симплицио. Но разве не верно сказать, что одна из целей математического образования научить школьников думать логически точно, выработать «навыки математического мышления», как пишут в программе? Разве формулы и правила не оттачивают ума учеников?

Сальвиати. Нет, не «оттачивают». Если хочешь, система дает прямо противоположный эффект: она отупляет. Острота ума причиняется решением задач, а не заучиванием того, как это следует делать.

---

[13] Папирус Ахмеса (папирус Ринда, англ. *Rhind papyrus*) — древнеегипетский папирус с формулировкой математических задач, являющийся копией еще более древнего текста, написанного при Аменемхете III, т.е. ок, 1850 г. до н. э. *Liber abaci* (с лат. «Книга абака») — главный труд жизни Леонардо Фибоначчи (1202 г.). *Ars magna* (с лат. «Высокое искусство») — замечательный алгебраический трактат Джироламо Кардано (1545 г.).

Симплицио. Ладно, согласен. А как быть с учениками, что идут в науку и в инженеры? Разве им не нужно обучение по стандартной программе? Не для того ли мы преподаем математику в школе?

Сальвиати. Много ли учеников станут писателями после уроков литературы? Мы учим литературе не для этого. Мы учим, чтобы просвещать, а не давать профтехобразование! Ведь самое важное умение и ученого, и инженера — умение мыслить творчески и независимо. А кому нужна эта *дрессировка*?!

Математическая программа

Состояние преподавания математике в школе так печально не только и не столько тем, что важное отсутствует — что на уроках математики не происходит математики, — но тем, что там присутствует: мешанина деструктивной дезинформации, называемая «программой». Давайте посмотрим, что противостоит нашим ученикам во имя математики, и какой это им наносит ущерб.

Самое удивительное в этой программе — это ее негибкость. Это особенно заметно по программе старших классов. От школы к школе, от города к городу, от штата к штату повторяются одни и те же темы, о них рассказывается одинаково и в одном и том же порядке. Вместо того, чтобы возмутиться этим Оруэлловским положением вещей, большинство людей просто принимают эту «стандартную программу» за самое математику.

Это тесно связано с тем, что я называю «мифом о лестнице» — идеей о том, что математику можно выстроить в последовательность «предметов», каждый из которых более «высокий», поднимающуюся до «высшей математики». Эта идея порождает *гонку*: некоторые студенты впереди, чьи-то родители переживают, что их ребенок «отстающий». И где финишная черта этой гонки, что ждет на ней? Печально, но гонка эта в никуда. В конце — вас обманут на ровно одно математическое образование, да еще так, что вы этого не заметите.

Настоящая математика не выпускается в консервах — в математике нет такой *идеи*, как алгебра за 9-й класс. Задачи ведут вас, куда ведут. *Искусство — не гонка*. Миф о лестнице это искаженный образ предмета математики, а учитель, следующий стандартной программе, лишь закрепляет этот миф, вместо того, чтобы показывать математику как нечто цельное. А в результате у нас получается математическая программа без исторической перспективы и тематической цельности, фрагментарный набор разнообразных тем и приемов, выстроенных в порядке легкости, с которой их можно свести к пошаговым инструкциям.

Вместо открытия и исследования у нас получаются правила и инструкции. Мы никогда не слышим, чтобы ученик говорил: «Мне захотелось узнать, есть ли смысл в возведении числа в отрицательную степень, и я обнаружил, что получится вполне осмысленно, если представить ее в виде обратного числа». Вместо того, учитель и учебники дают «правило отрицательной степени» как *fait d'accompli* без упоминания эстетики этого выбора или хотя бы того, что выбор был.

Вместо осмысленных задач, какие могли бы привести через неисследованную территорию обсуждения и спора к синтезу разнообразных идей, к чувству тематического единства и гармонии в математике, мы имеем столь безрадостные повторяющиеся упражнения на определенную технику, разъединенные друг с другом и отсоединенные от математики как целого, что ни у учителей, ни у учеников не возникает даже тени идеи, как такие вещи могли вообще сложиться.

Вместо естественного контекста задачи, где ученики могли бы сами выбрать слова для обозначения сущностей, выдается бесконечная череда немотивированных априорных «определений». Программа навязывает жаргон и классификацию ни для какой более цели, кроме возможности учителям проверять этот же жаргон на экзаменах. Ни один математик в мире не станет противопоставлять «смешанную дробь» 2 ½ «неправильной дроби» 5/2. Да они же равны! Это одно и то же число, их свойства одинаковы. Да кто хотя бы помнит эти слова после четвертого класса?

Куда легче, конечно, проверять знание бесцельных терминов, чем вдохновлять на создание прекрасного и поиск своего собственного смысла. Даже если мы и согласимся, что базовый математический вокабуляр необходим, — это не он. Пятиклассников учат говорить «ось абсцисс» и «ось ординат» вместо «осей x и y», но не дают им повода сказать такие слова, как «предположение» или «контрпример». Старшеклассников учат писать $\sec x$, секанс, вместо обратной функции $1/\cos x$ — «определению», обладающему такой же интеллектуальной силы, как сокращение «и т. п.». Это сокращение вышло из навигационных таблиц XV в. и попрежнему остается в ходу (в то время как, например, версинус вышел из употребления) в наше время, когда точные навигационные вычисления более не проблема, по чистой исторической случайности. Так уроки математики забиваются бесполезной терминологией во имя терминологии.

Программа не столько последовательность тем или идей, сколько череда систем математической нотации. Математика как будто состоит из секретного списка математических символов и правил манипуляции ими. Малышам дают + и ÷. Более взрослым можно уже доверить √, а потом x и y и алхимию скобок. Затем им забивают в головы sin, log и $f(x)$, а потом удостаивают d и ∫. И все это происходит, разумеется, без математически осмысленного опыта.

Эта программа настолько недвижима, что учителя и авторы учебников могут надежно, за многие годы, предсказать, что ученики будут делать, с точностью до номера страницы с упражнениями. Не вызывает удивления, когда в 9 классе задают вычисление $[f(x + h) - f(x)] / h$ для различных функций f, так чтобы они «уже видели» это выражение, когда у них будут начала анализа три года спустя. Естественно, не дается (да и не ожидается) никакой мотивации пониманию, что означает эта на первый взгляд случайная комбинация операторов. Учителя, пытающиеся объяснить, что это означает, и — уверен! — полагающие, что оказывают школьникам услугу, на самом деле просто дают им еще одно скучное упражнение. «Чего от меня хотят? А, и это до кучи? Угу».

Еще один пример — когда школьников учат выражать информацию в неоправданно сложной и неестественной форме просто потому, что когда-то, в далеком будущем, это будет иметь смысл. Задумывается ли хоть на секунду учитель 6-го класса, заставляя учеников записать утверждение «x находится в интервале от 3 до 7» в виде $|x - 5| < 2$, зачем он это делает? Авторы бестолковых учебников серьезно полагают, что этим помогают ученикам подготовиться ко дню «Ч», когда много лет спустя они начнут изучать аналитическую геометрию или абстрактные метрические пространства? Сомневаюсь. Думаю, что просто копируя друг друга десятилетиями, меняя, самое большее, шрифт или цвет под выделенным текстом, они лучатся гордостью оттого, что школьная система приняла их новый учебник, и тем самым становятся ее невольными сообщниками.

Математика — это решение задач, и именно решение задач должно быть в центре математической жизни школьника. Как бы ни было тяжело, какие бы ни случались неудачи — ученики и учителя должны быть вместе на этом пути — находя идеи, не находя идей, открывая закономерности, строя предположения, конструируя примеры и контрпримеры, приводя аргументы и критикуя работу друг друга. Определенная техника образуется в процессе этой работы, как это происходило исторически: не в изоляции от решения задач, но в органическом соединении с этим процессом.

Преподаватели родного языка знают, что орфография и пунктуация лучше всего изучаются в процессе чтения и письма. Учителя истории знают, что имена и даты совершенно неинтересны в отрыве от картины исторических событий. Отчего же математическое обучение застряло в XIX в.? Сравните ваши воспоминания об уроке алгебры с этим воспоминанием Бертрана Рассела[14]:

> *Меня заставляли учить наизусть: квадрат суммы двух чисел равен сумме их квадратов, увеличенной на их удвоенное произведение. У меня не было ни малейшего представления о том, что бы это могло значить; когда я не мог запомнить этих слов, учитель треснул меня книгой по голове, что, однако, ни капли не стимулировало мой интеллект.*

Разве изменилось что-нибудь с тех пор?

Симплицио. Не думаю, что так будет честно. Конечно, методы обучения изменились!

Сальвиати. Ты имеешь в виду методы тренировки. Учение — непростые человеческие отношения; метода здесь быть не может. Или, давай я так скажу: если тебе нужен метод, значит, ты не очень хороший учитель. Если у тебя нет достаточно «чувства» своего предмета, чтобы говорить о нем своими словами, естественно и спонтанно, значит, ты и сам его не понимаешь. И, говоря о том, что учительство застряло в девятнадцатом веке — тебя не пугает, что программа при этом застряла в семнадцатом? Подумай обо всех тех потрясающих открытиях и глубоких переворотах в человеческой мысли, что произошли за последние три века! Они не упоминаются, словно бы их и не было.

Симплицио. Может, ты просто слишком многого хочешь от учителей математики? Чтобы они оказывали индивидуальное внимание трем десяткам учеников, ведя их по их собственным путям открытий и просвещения, да еще чтобы они следили за последними математическими открытиями?

Сальвиати. А ты хочешь, чтобы учитель рисования мог дать тебе толковый совет по поводу твоей картины, чтобы он знал историю последних трехсот лет живописи? А серьезно — нет, я и не жду этого, просто мечтаю о том, чтобы так было.

Симплицио. Значит, виноваты учителя математики?

---

[14] Бертран Рассел (*Bertrand Russell*, 1872—1970) — английский философ, логик и математик.

Сальвиати. Нет, виновата культура, которая их производит. Они стараются как лучше, но делают так, как их учили. Уверен, многие из них любят учеников, и им не нравится подвергать их тому, что им приходится делать. Они ощущают, что такое преподавание бессмысленно, и только вредит. Они чувствуют, что делаются шестеренками в мясорубке духа. Однако, у них не хватает перспективы, чтобы осознать это, тем более бороться с этим. Они должны «готовить учащихся к переходу в следующий класс».

Симплицио. Ты и вправду думаешь, что все студенты имеют столь высокий уровень, чтобы создавать собственную математику?

Сальвиати. Если мы и в самом деле думаем, что творческое мышление — это слишком «высокий уровень» для наших учеников, зачем тогда мы заставляем их писать работы по истории и литературе? Проблема не в том, что школьники не могут того, что ты говоришь, — проблема в том, что учителя этого не могут! Они никогда не доказывали ничего сами — как же они могут направить на правильный путь ученика? Как бы там ни было, очевидно, что разброс в способностях школьников будет, но, по крайней мере, они смогут любить или ненавидеть математику такой, какая она есть, а не эту кустарную под нее подделку!

Симплицио. Но ведь мы точно хотим, чтобы ученики обладали определенным набором базовых знаний и умений. Вот для чего нужна программа, и вот почему она единообразна: существует некий набор основных фактов, одинаково необходимый всем и во все времена. $1 + 1 = 2$, сумма углов треугольника равна 180°. Это не мнения и не художественные оценки.

Сальвиати. Напротив. Математические структуры, и практически полезные, и нет, возникают в контексте задач, и получают смысл только из этого контекста. Иногда мы хотим, чтобы $1 + 1$ равнялось нулю — в арифметике по модулю 2. Сумма углов треугольника на сфере больше 180°. Это не факты сами по себе — все здесь относительно. Важна повесть, а не развязка сюжета.

Симплицио. Я уже устал от твоей мистической болтовни! Скажи мне, вот базовая арифметика — ты согласен или не согласен с моим мнением, что ученики должны ее знать?

Сальвиати. Смотря что ты называешь «базовой арифметикой». Если ты называешь ею понимание задач счета и разбиения, преимущества группировки и поименования, различение вещи и ее обозначения, историю развития счетных систем — да, я считаю, что школьники должны это изучать. Если же ты называешь ею заучивание арифметических фактов вне базовой системы концепций — нет. Исследование вовсе не очевидного факта, что пять кучек по семь это столько же, сколько семь кучек по пять — да. Заучивание правила, что $5 \times 7 = 7 \times 5$ — нет. Занятие математикой — это всегда открытие закономерностей и создание красивых и осмысленных объяснений.

Симплицио. Ладно, а геометрия? Школьники все время доказывают геометрические теоремы. Разве, по-твоему, уроки геометрии в старших классах — не образец того, какими должны быть уроки математики?

Геометрия в старших классах: инструмент дьявола

Ничто так не раздражает автора едкого обличения, как предложение самой главной жертвы его яда в качестве аргумента в поддержку его мысли. Нигде волк в овечьей шкуре не вероломен настолько, как на уроке геометрии. Такая попытка школы дать введение в искусство рационального рассуждения опасна *сама по себе*.

Этот вирус атакует математику в самое сердце, создавая иллюзию, будто именно на уроке геометрии школьники знакомятся с математическим рассуждением, и тем самым разрушает саму суть творческого рационального мышления, отравляя учеников в стремлении к этому занимательному и красивому предмету, навсегда калеча их способность мыслить о математике естественным и интуитивным путем.

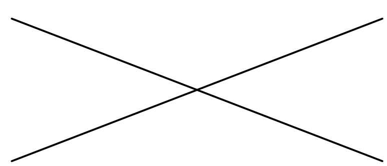
Механизм, стоящий за этим, тонок и изощрен. Жертва-ученик сначала оглушается и парализуется потоком бессмысленных определений, положений и значков, а затем медленно и болезненно отлучается от естественного интереса и интуиции о геометрических формах и их закономерностях систематической пропагандой корявого языка и искусственного формата так называемого «формального геометрического доказательства».

Скажем прямо и без метафор: урок геометрии есть наиболее эмоционально и ментально деструктивная компонента всей математической программы от первого класса и до последнего. Другие математические курсы могут спрятать прекрасную птицу или посадить ее в клетку; лишь на уроке геометрии ее подвергают бездушным пыткам. (Нет, видимо, я еще не готов говорить без метафор.)

Здесь систематически подрывается интуиция ученика. Доказательство, математическое рассуждение есть произведение искусства, поэма. Ее цель — *удовлетворить*. Красивое доказательство призвано объяснять, и объяснять ясно, глубоко и элегантно. Хорошо написанное, проработанное рассуждение должно чувствоваться холодными брызгами и вести лучом маяка — освежать дух и освещать ум. Оно должно *очаровывать*.

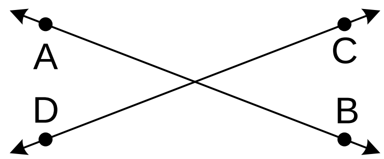
В том, что сходит за доказательство на уроке геометрии, нет ничего очаровательного. Школьникам дают негибкий, догматический формат, в котором они должны производить так называемые «доказательства» — формат настолько непотребный и неподходящий, как, например, требование от детей, желающих высадить сад цветами, называть их цветы латинскими видом и родом.

Рассмотрим примеры этого безумия. Начнем с рисунка двух пересекающихся прямых:



На первом шаге рисунок следует замутить излишними обозначениями. Нельзя говорить о двух пересекающихся прямых: им следует дать вычурные обозначения. Не просто «прямая

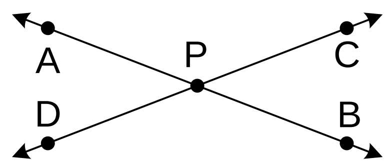
1» и «прямая 2», или a и b. Мы должны, в соответствии с требованиями школьной геометрии, выбрать произвольные ненужные точки на этих прямых и называть эти прямые в соответствии со специальной «системой обозначения прямых».



Теперь мы будем называть их $\underline{AB}$ и $\underline{CD}$. Боже упаси забыть надчеркивание: запись AB обозначала бы длину отрезка (во всяком случае, как это делается сейчас[15]). Ничего, что эта система бессмысленно усложнена, просто научитесь ею пользоваться. Теперь начинается собственно доказательство, обычно предваряемое каким-нибудь абсурдным названием, например,

<u>ТЕОРЕМА 2.1.1</u>

Пусть $\underline{AB}$ и $\underline{CD}$ пересекаются в точке P.
Тогда $\angle APC \cong \angle APC$[16].



То есть — что углы одинаковы. Да пересекающиеся прямые симметричны, ради всего святого! И, как будто этого мало, это очевидно верное утверждение должно быть «доказано»:

<u>Доказательство.</u>

	Утверждение	**Объяснение**
1.	$m\angle APC + m\angle APD = 180$ $m\angle BPD + m\angle APD = 180$	Постулат о сложении углов.
2.	$m\angle APC + m\angle APD = m\angle BPD + m\angle APD$	Свойство подстановки
3.	$m\angle APD = m\angle APD$	Рефлексивное свойство равенства
4.	$m\angle APC = m\angle BPD$	Аддитивное свойство равенства
5.	$\angle APC \cong \angle BPD$	Постулат об измерении углов

Вместо остроумного и интересного рассуждения, написанного человеческим существом на одном из естественных языков Земли, нам предлагается это гнетущее, бездушное, бюрократическое заполнение бланка. И какого слона удалось раздуть из мухи! Мы что, на самом деле

[15] Намек, несомненно, на слишком быстрое изменение правил математической записи — она столь строга, но меняется, тем не менее, едва ли не ежегодно.
[16] Система записи, очевидно, такова: $\angle APC$ обозначает угол APC, а $m\angle APC$ — величину угла APC. Знак = означает равенство и применяется только к численным величинам, напр., величинам углов, а знак $\cong$ обозначает конгруэнтность и применяется только к геометрическим объектам, напр., углам. Читателю в качестве головоломки предлагается выдумать систему еще ужаснее этой. Читателя же, собравшегося уже обвинить автора в утрированном преувеличении, переводчик, также знакомый с американской школьной системой, может заверить со всей серьезностью, что дела обстоят именно так.

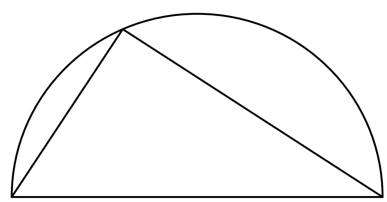
хотим показать, что самоочевидное наблюдение требует такого огромного введения? Честно: вы его прочитали или нет? Нет. Кто станет это читать?

Такой вывод столь элементарного утверждения заставляет людей сомневаться в собственной интуиции. Подвергая сомнению очевидное, настаивая на том, чтобы оно было «строго доказано» (как будто вышеприведенное доказательство строгое!), ученику как бы говорят: «Твоя интуиция и твои идеи сомнительны. Ты должен говорить и думать по-нашему».

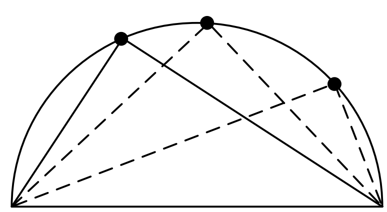
В математике, без сомнения, есть место формальному доказательству. Но место ему не в первом введении ученика в предмет математического рассуждения. Позвольте ему сперва ознакомиться с некоторыми математическими объектами, понять, чего от них можно ожидать, перед тем, как вы начнете все формализовать. Строгое формальное доказательство необходимо только в кризисной ситуации, когда ваши воображаемые объекты начинают вести себя противоинтуитивным образом, когда возникает парадокс. Но излишняя профилактическая гигиена здесь излишня — никто еще не заболел! Разумеется, если логический кризис рано или поздно происходит, его следует исследовать, а аргументы прояснить, но и этот процесс может быть проделан интуитивно и неформально. Дух математики как раз и состоит в этом диалоге со своим собственным доказательством.

Дети не только запутываются этим педантизмом — ведь нет ничего более непонятного, чем доказательство очевидного — но даже те, чья интуиция еще пока цела, вынуждены переводить их отличные, прекрасные идеи на этот язык абсурдных иероглифов, который учитель называет «верным». Учитель же льстит себе, полагая, что это каким-то неизвестным образом «оттачивает ум» ученика.

В качестве более серьезного примера, рассмотрим случай треугольника в полукруге.



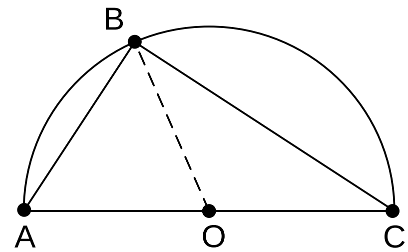
Чудесная закономерность в этом геометрическом узоре состоит в том, что, куда бы вы ни поместили вершину треугольника, угол при этой вершине всегда будет прямым.



В этом случае наша интуиция находится в сомнении. Вовсе даже и не ясно, что это утверждение всегда истинно, даже и не похоже на то — разве не должен угол меняться, когда мы двигаем вершину треугольника по окружности? Это замечательная задача! Всегда ли угол прямой? Если да, почему? Какая чудесная самостоятельная работа! Какая чудесная возможность проявить смекалку и воображение! Разумеется, такой возможности ученикам не дают, и их интерес немедленно сбивается нижеследующим:

ТЕОРЕМА 9.5.

Пусть ΔABC вписан в полукруг диаметром $\underline{AC}$.
Тогда угол $\angle ABC$ прямой.



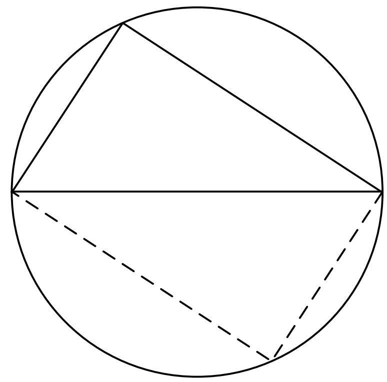
Доказательство.

	Утверждение	**Объяснение**
1.	Проведем радиус OB. Тогда OB = OC = OA.	Дано.
2.	$m\angle OBC = m\angle BCA$ $m\angle OBA = m\angle BAC$	Т. о равнобедренном треугольнике.
3.	$m\angle ABC = m\angle OBA + m\angle OBC$	Постулат о сложении углов.
4.	$m\angle ABC + m\angle BCA + m\angle BAC = 180$	Т. о сумме углов треугольника.
5.	$m\angle ABC + m\angle OBC + m\angle OBA = 180$	Подстановка (3).
6.	$2\ m\angle ABC = 180$	Подстановка (2).
7.	$m\angle ABC = 90$	Мультипликативное свойство равенства.
8.	Угол $\angle ABC$ прямой	Определение прямого угла.

Возможно ли что-нибудь более непривлекательное и неэлегантное? Можно ли было сделать доказательство более запутанным и нечитабельным? Это не математика! Доказательство должно быть посланием богов, а не телеграммой Алекса Юстасу! Вот к чему приводит неуемное чувство строгости: к *мерзости*. Дух доказательства похоронен под грудой путаного формализма.

Математики так не работают. Ни один математик никогда так не работал. Это полное и окончательное непонимание предприятия математики. Математика не занимается возведением барьеров между нами и нашей интуицией, чтобы сделать простое сложным. Математика убирает препятствия нашей интуиции, и сохраняет простое простым.

Сравните эту мешанину со следующим рассуждением одного моего семиклассника:



Возьмем треугольник и перевернем его внутри круга так, что получится четырехугольник, вписанный в круг. Поскольку мы перевернули треугольник, стороны четырехугольника равны, то есть это параллелограмм. Но он не может быть наклонным, потому что его обе диагонали — диаметры круга, и, следовательно, равны. Значит, это прямоугольник, и все его углы прямые. Вот почему угол треугольника всегда прямой.

Разве не восхитительно? Моя цель не сравнить, какое из двух рассуждений лучше как идея, а показать, насколько идея видна только во втором. (На самом деле, идея первого доказательства тоже хороша, но она едва проступает через эту запись, как бы в тусклом зеркале, гадательно.)

Еще важнее то, что это *собственная* идея ученика. У класса была замечательная задача, над которой дети работали, разрабатывали свои предположения, пытались вывести доказательства, и это то, что в конце концов привел один из учеников. Разумеется, это заняло несколько дней, и получилось только в результате долгой череды неудач.

Честно говоря, я изрядно перефразировал доказательство. Оригинал был куда более запутанным и содержал множество ненужных слов (и грамматических и орфографических ошибок). Тем не менее, я понял его. И все эти дефекты были только к лучшему — мне, как учителю, они тоже дали понять кое-что важное. Я указал на несколько стилистических и логических неточностей, и ученик смог исправить их. Например, я был недоволен утверждением о том, что обе диагонали — диаметры, мне не казалось это полностью очевидным — но это лишь означало, что мы должны были извлечь что-то из понимания ситуации. Ученик прекрасно справился и с этой проблемой:

Поскольку треугольник повернут ровно на половину оборота, вершина должна находиться напротив того места, откуда мы начали ее поворачивать. Вот почему обе диагонали четырехугольника — диаметры.

Вот такая замечательная работа и прекрасная математика — даже не знаю, кто был более горд результатом: ученик или я. Вот пример именно того опыта, какому я хотел бы научить всех своих учеников.

* * *

Проблема со стандартной программой геометрии в том, что опыт самостоятельного терзающегося художника в нем отсутствует. Искусство доказательства заменено бланком установленной формы для пошагового вывода. Учебник приводит набор определений, теорем, доказательств, учитель переносит их на доску, ученики переписывают их в тетради. Детей учат повторять эти доказательства в их упражнениях. Те, кто обучаются этому повторению быстро, называются «хорошими учениками».

В результате ученик становится пассивным участником творческого акта. Ученики делают утверждения, чтобы заполнить графы в этом бланке доказательства, не потому, что они хотят именно это *выразить*. Они не *строят* аргументов — они обезьянничают, копируя аргументы. Таким образом, они не только не понимают, что говорит учитель — *они не понимают, что говорят сами*.

Даже традиционный способ, которым представляются доказательства — ложь. Перед броском в каскад пропозиций и теорем вводятся определения, чтобы сделать доказательства возможно более краткими, как бы создавая иллюзию ясности. На поверхностный взгляд затея выглядит невинной: почему бы и не ввести список сокращений, чтобы говорить далее экономичнее? Проблема кроется в том, что определения *важны*. Они должны происходить эстетически обоснованно из того, что вы, создатель произведения искусства, считаете важным. И они должны быть вызваны задачей. Определения должны привлекать внимание к свойствам объектов и структуры задачи. Исторически это происходило как результат работы над задачей, а не как прелюдия к ней.

Вы не начинаете работы с определений — вы начинаете ее с задачи. Никому в голову не приходила идея, что число может быть «иррациональным», до тех пор, пока Пифагор не попытался вычислить диагональ квадрата и не пришел к выводу, что она непредставима дробью. Определения имеют смысл, когда вы достигаете в работе той точки, где требуется осмысленное различение сущностей. Немотивированные же определения, напротив, скорее *вызовут* путаницу.

Это еще один пример того, как от учеников скрывают математический процесс, и исключают их из него. Ученики должны уметь вводить свои собственные определения по необходимости — чтобы самим ограничить обсуждаемое. Я не хочу, чтобы ученики говорили «определение», «теорема», «доказательство» — только «мое определение», «моя теорема», «мое доказательство».

Еще одна серьезная проблема с такой подачей материала в том, что она скучна. Эффективность и экономия противостоят хорошему преподаванию. Уверен, что Евклиду такая система не понравилась бы, и точно знаю, что ее не одобрил бы Архимед.

Симплицио. Подожди-ка минуточку. Не знаю, как тебе, а вот мне нравились уроки геометрии. Мне нравилась структура, нравилось доказательство в строгой форме.

Сальвиати. Не сомневаюсь, что так и было. Уверен, что ты иногда даже решал интересные задачи. Многим нравятся уроки геометрии (хотя куда более многие терпеть их не могут). Но это не аргумент в защиту существующего режима. Скорее, это яркое свидетельство притягательности самой математики. Сложно разломать нечто столь прекрасное: даже слабая тень ее будет и манить, и вознаграждать. Многим нравится и раскраски раскрашивать, ведь это расслабляющее и разноцветное рукоделие. Но они от этого живописью не делаются.

Симплицио. Но говорю же тебе: мне *нравилась* геометрия.

Сальвиати. И если бы у тебя случился более естественный математический опыт, тебе бы он понравился еще больше.

Симплицио. Значит, нам просто нужно организовать свободное от планов математическое путешествие, и ученики научатся тому, чему уж они научатся?

Сальвиати. Вот именно. Задачи ведут к другим задачам, техника вырабатывается по мере надобности, а новые темы возникают естественным образом. И если какой-то вопрос так и не возникнет за тринадцать лет обучения, насколько же он тогда интересен?

Симплицио. Да ты совсем с ума сошел!

Сальвиати. Возможно. Но даже работая в обычных рамках, хороший учитель может направлять обсуждение и переходить от задачи к задаче так, чтобы ученики могли открывать и изобретать для себя математику. Беда в том, что бюрократия не позволяет отдельному учителю это делать. При жестком наборе программ учитель не может *вести за собой*. Не должно быть стандартов, и не должно быть программ — только личности, делающие по собственному разумению лучшее возможное для учеников.

Симплицио. Но как тогда школы могут гарантировать одинаковые базовые знания учеников? Как мы сможем точно и объективно сравнить их?

Сальвиати. Никак, и мы не будем их сравнивать — все будет так, как бывает на самом деле. Рано или поздно ты оказываешься перед тем фактом, что люди все разные — и это хорошо. Как бы там ни было, но никакого давления на самом деле нет. Допустим, ученик оканчивает среднюю школу, не помня формул синуса и косинуса двойного угла (как будто выпускники их сейчас помнят). Ну и что? По крайней мере, у выпускника будет правильное понятие о настоящем предмете математики, по крайней мере он увидит нечто прекрасное!

Заключение

Завершая эту критику стандартной школьной программы, я хотел бы представить в помощь обществу первую до конца честную школьную программу по математике для всех классов.

Начальная школа

Начальное запаривание мозгов. Ученики постигнут, что математика — это не то, что ты делаешь, а то, что делают за тебя. Внимание уделяется дисциплине на занятиях, аккуратному заполнению прописей и тщательному исполнению инструкций. Дети изучат сложную систему алгоритмов для манипуляции символами непонятного алфавита, не имеющую отношения к тому, что им интересно и любопытно, несколько столетий назад считавшуюся слишком сложной для среднего взрослого. Особые усилия прикладываются к заучиванию таблицы умножения, а также к родителям, учителям и самим ученикам.

Средняя школа

Ученики обучатся взгляду на математику как совокупность шаманских ритуалов, вечных и неизменных. Ученикам будут выданы Священные Таблички учебников, и они обучаются говорить о старейших шаманах в третьем лице (например, «чего от меня хотят? они хотят, чтобы я что поделил?»). Искусственные, вымученные «текстовые задачи» будут введены, чтобы, по сравнению с ними, безумная зубрежка арифметики показалась приятной и интеллектуальной. Ученики сдают экзамены на знание бессмысленных технических терминов, таких, как «целое число», «правильная дробь», вводимых без малейших на то причин. Данный курс полностью подготовит ученика к курсу алгебры-1.

Алгебра-1

Чтобы избежать потерь времени на размышления над числами и закономерностями, курс построен вокруг символов и правил манипуляции ими. Плавное и постепенное введение в предмет, начиная с задач месопотамских табличек и заканчивая высоким искусством алгебры эпохи Возрождения, заменяется фрагментарным постмодернистским пересказом без действующих лиц, сюжета и линии повествования. Требование записывать все числа и выражения в стандартной форме создаст дополнительные трудности в понимании смысла тождества и равенства. Ученики по непонятной причине также заучат наизусть формулу для решений квадратного уравнения.

Геометрия

Не связанный с остальной программой, этот курс даст ученикам надежду на осмысленные математические действия, а затем не оправдает эту надежду. В курсе дается неуклюжая и непонятная система записи. Ученики будут напряженно работать над запутыванием простого до сложного. Целью курса является изведение остатков естественного математического любопытства для подготовки к курсу алгебры-2.

Алгебра-2

Предметом курса является немотивированное и неуместное применение аналитической геометрии. Конические сечения вводятся в системе координат, надежно скрывающей их простоту и эстетику. Учащиеся обучатся переписывать квадратичные формы в различные стандартные форматы без какой-либо цели. В курсе также вводятся экспоненциальные и логарифмические функции, несмотря на то, что они не являются алгебраическими объектами, просто потому, что больше их воткнуть было некуда. Название курса выбрано с целью закрепить мифологию о лестнице. Почему между алгеброй-1 и алгеброй-2 включается геометрия, в курсе не рассматривается.

Тригонометрия

Две недели содержания курса растянуты на полугодие самоценной игрой в определения. Интересные и красивые явления, например, как стороны треугольника зависят от его углов, будут даны с упором на бесполезные сокращения и устаревшие обозначения, чтобы не допустить возникновения у учащихся ясной идеи о предмете. Учащиеся изучат также бесполезные мнемоники, заменяющие естественные и интуитивные понятия о симметрии[17]. Измерение треугольников объясняется без упоминания трансцендентности тригонометрических функций, а также лингвистических и философских проблем, возникающих при подобных измерениях. Калькуляторы обязательны, чтобы запутать эту тему еще больше.

Начала анализа

Курс представляет собой винегрет из несвязанных между собою тем. Производится безуспешная попытка дать ученикам понятия о методах мат. анализа второй половины XIX в. на совершенно неподходящих примерах. Вводятся технические определения предела и непрерывности, заменяющие собою интуитивно ясное понятие плавного изменения. Как показывает название курса, он предназначен для подготовки учащихся к полному курсу мат. анализа, в котором будет завершено систематическое затуманивание идей формы и движения.

Мат. анализ

Курс предназначен для изучения математики движения и лучшего способа похоронить ее под горой формализма. Несмотря на то, что курс является введением в дифференциальное и интегральное исчисление, простые и глубокие идеи Лейбница и Ньютона будут заменены более сложным функциональным подходом, разработанным в ответ на некоторые аналитические кризисы, которые не относятся к данному уровню изложения и, разумеется, не будут упомянуты. Этот курс будет также слово в слово повторен в колледже.

* * *

Итак, перед вами рецепт для неизлечимого поражения юных умов, надежное излечение от любознательности. Что же они сделали с математикой!

В математике, древней форме искусства, есть и захватывающая дух глубина, и щемящая сердце красота — а вышло так, что люди противопоставляют математику творчеству. Они проходят мимо формы искусства, что древнее книги, глубже поэмы и абстрактнее любой абстракции. И ведет их именно *школа*! О скорбный замкнутый круг невинных учителей, несущих беду невинным ученикам! А ведь нам могло бы быть весело и интересно.

Симплицио. Ты огорчил меня изрядно. И что же дальше?

Сальвиати. Кажется, у меня есть одна интересная идея насчет пирамиды в кубе…

[17] Автор приводит в качестве примеров мнемоники *All Students Take Calculus* и *SohCahToa*. Читателя, не знакомого с мнемониками, мы призываем не знакомиться с ними и далее.